



Théorie-M sur des Variétés d'holonomie G_2

Lalla Btissam Drissi ^{1,2}

1. Lab/UFR Physique des Hautes Energies, Faculté des Sciences, Rabat, Morocco.

2. Groupement National de Physique des Hautes Energies, GNPHE; Siège focal, Rabat, Morocco.

Abstract

L'un des objectifs de ce papier consiste à ramener la théorie-M, considérée comme la limite des cinq différentes théories des supercordes, à une théorie à $3 + 1$ dimensions et avec un nombre de supercharges minimal. Nous montrons que ce modèle ne se réalise qu'à travers l'introduction d'une variété très spéciale d'holonomie G_2 . Par la suite, nous procédons à l'étude des modèles résultants de la compactification de la théorie-M sur cette variété dans ses deux cas: régulier et singulier.

Keywords: *Théorie-M, Théorie des supercordes, Variétés d'holonomie G_2 , Variété $K3$, Singularités ADE.*

I. INTRODUCTION

L'ultime but de la physique des hautes énergies est de fournir une théorie unique qui décrive l'univers dans son ensemble *. Cette quête fut lancée dans les années 1960 sous l'impulsion des physiciens Glashow, Salam et Weinberg. Ces trois chercheurs sont parvenus à unifier les deux interactions faible et électromagnétique en faisant appel à des symétries internes. Dès lors, cette théorie fut connue sous le nom de "théorie électrofaible". Parallèlement à cette dernière, le "Modèle Standard" est apparu pour tenter d'expliquer et d'ordonner la grande quantité de particules découvertes. Toutefois, vers les années soixante dix, cette branche de la physique a pu décrire, dans ce qu'on appelle la théorie de la grande unification, les trois forces électromagnétique, faible et forte. Mais malgré son succès remarquable, le Modèle Standard demeure insatisfaisant puisqu'il n'inclut pas la gravité. Ainsi dans le but de faire face à cet ob-

stacle, d'autres modèles ont été développés parmi eux la théorie des cordes.

Le postulat de base de la théorie des cordes consiste à représenter la particule non pas par un point, mais plutôt par une corde dotée d'une longueur très petite^{1,4,2}. Celle-ci balaye un chemin qui est une surface bidimensionnelle conforme.

La théorie des cordes la plus simple, est celle des cordes bosoniques qui semble n'être valable que si l'espace-temps possède 26 dimensions au lieu de nos quatre habituelles! En plus de sa dimension critique, cette théorie n'est pas consistante en raison de quelques lacunes qu'elles présentent (voir section II). Afin d'y remédier, la théorie des supercordes ou des cordes supersymétriques fut introduite. Cette dernière est censée constituer un jour le meilleur espoir de développer une "théorie du tout" fondamentale, surtout qu'elle contient dans son spectre une particule identifiée au graviton (médiateur des interactions gravitationnelles). Selon cette théorie, il existe cinq types de supercordes à dix dimensions deux de supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ et trois autres ayant une supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ ³. Quoiqu'elles vivent dans un espace-temps dont la dimension est inférieure à 26, celle-ci reste très supérieure à nos quatre dimensions réelles. Heureusement, le procédé de compactification qui

* AJMP is an African Scientific Journal published temporary by Moroccan Grouping In High Energy Physics, Rabat, e-mail: ajmp@fsr.ac.ma

prend sa source des anciens travaux de Kaluza-Klein, permet aux cinq modèles d'être définis dans des dimensions inférieures^{3,6}. Ce mécanisme offre d'une part la possibilité de réduire la dimension, et d'autre part celle de connecter les différents modèles obtenus par le biais des symétries de dualités. Parmi ces symétries, nous citons la dualité-T et aussi la dualité-S qui permet de déterminer la limite de couplage fort de trois modèles seulement des supercordes: type IIB, type I et Hétérotique $SO(32)$. Tandis qu'aux deux autres modèles: type IIA et Hétérotique $E_8 \times E_8$, il a été conjecturé que ce sont des limites non perturbatives de la théorie-M. Cette théorie est décrite à faible énergie par une théorie de supergravité à onze dimensions ayant 32 supercharges conservées ($\mathcal{N} = 1$).

La force de la théorie-M c'est qu'entre autre elle est envisagée comme la limite des cinq différentes théories des supercordes. Cependant elle se propage, comme nous venons de le mentionner, dans un espace à onze dimensions alors que l'espace réel est seulement à 3+1 directions non compactes. A cet égard, l'un des objectifs centraux de ce papier consiste à ramener la théorie-M à une théorie à 3+1 dimensions et avec un nombre de supercharges minimales. Cette dernière ne s'obtient qu'à travers l'introduction d'une variété très spéciale qui doit vérifier deux propriétés à la fois^{8,18}:

1. Etre de dimension sept.
2. Avoir pour groupe d'holonomie le groupe \mathbf{G}_2 qui, lui seul, permet de conserver le $\frac{1}{8}$ des supercharges initiales.

Par conséquent, seule la compactification de la théorie-M sur cette variété assure l'obtention d'un modèle à $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ ayant un groupe de jauge abélien.

Compte tenu de la nouveauté et de la grande importance de ce résultat traitée dans une bonne partie de ce document, nous avons jugé utile d'aller au delà de l'idée de la compactification de la théorie-M sur une variété d'holonomie \mathbf{G}_2 régulière. Pour cette raison, nous nous sommes basés dans le développement de cet aspect sur les travaux récents d'Acharya, Atiyah, Witten et d'autres^{8,16,17,19}. Selon ces recherches, l'attribution de réalisations bien particulières à la variété d'holonomie \mathbf{G}_2 , localement au voisinage des singularités, est capable de nous susciter un modèle à quatre dimensions avec un nombre minimal de supercharges et qui possède en plus un groupe de jauge non abélien ainsi que de la matière chirale.

Pour développer ces différents axes nous proposons de répartir ce papier en trois sections que nous présentons comme suit:

Dans la deuxième section, nous commençons par introduire la théorie des cordes bosoniques tout en rappelant des notions de base de la théorie des supercordes. Ensuite nous évoquons le procédé de compactification ainsi que quelques exemples de symétrie de dualité. Nous complétons cette section en traitant, selon deux approches différentes, la théorie-M comme l'une des conséquences majeures de l'étude de dualité.

Quand à la troisième section, elle est consacrée à la compactification de la théorie-M que nous étudions en deux parties:

Dans la première partie, nous présentons, en détail, une dualité d'importance capitale entre la théorie-M sur $K3$ et la corde hétérotique sur T^3 à sept dimensions. Alors que dans la seconde partie, nous dévoilons certaines des caractéristiques et propriétés de la variété compacte qui nous permet d'aboutir à un modèle à quatre dimensions avec un nombre minimal de supercharges. Cette variété n'est autre qu'une variété à sept dimensions ayant un groupe d'holonomie \mathbf{G}_2 que nous notons X .

La quatrième section est également constituée de deux parties.

Au cours de la première, nous présentons une réalisation de la variété X dont les singularités garantissent l'obtention d'un modèle physique à $D = 4$ avec $\mathcal{N} = 1$ ayant un groupe de jauge non abélien. Or, inspirée de la dualité corde-corde la plus intéressante existant à six dimensions entre la supercorde type IIA sur $K3$, avec des singularités ADE , et la supercorde hétérotique sur T^4 , nous déduisons que cette réalisation ne peut être qu'une fibration $K3$ sur une base à trois dimensions et dont le premier nombre de Betti est nul.

Dans la deuxième partie de cette section, nous nous sommes basées sur un résultat des travaux de Katz et Vafa²² concernant l'ingénierie géométrique de la matière chargée pour type IIA sur une Calabi-Yau de dimension trois complexes. Ce travail nous a permis de compléter la construction de X afin qu'elle fournisse de la matière chirale en plus des symétries non abéliennes dans le spectre du modèle résultant à quatre dimensions.

Enfin, nous terminons par une conclusion.

II. THÉORIE-M À PARTIR DES SUPERCORDES

A. Théorie des cordes et des supercordes

A la fin des années 1960, la théorie des cordes (ou la théorie des cordes bosoniques) a surgit afin de décrire la force nucléaire forte. Quelques années

plus tard, en 1971, l'inclusion des fermions a entraîné l'étude de la corde supersymétrique appelée aussi supercorde. Cependant, le développement rapide qu'a connu la Chromodynamique quantique (QCD) en 1973 l'a incité à être reconnue comme théorie capable de décrire les interactions fortes. Ainsi la théorie des cordes (supercordes) fut privée de son but initial, mais elle acquiert un autre objectif puisqu'elle fut estimée par la suite d'être celle qui constituera un jour "une théorie du tout fondamentale".

Effectivement, il existe parmi ses états non massifs, un état qui a un spin 2. En 1974, Sherk et Shwartz et indépendamment Yoneya ont montré que cette particule interagit comme un graviton^{1,4}. Ce fait a permis à la théorie d'inclure la relativité générale. Par conséquent, les trois physiciens ont proposé d'une part que la théorie doit être utilisée pour l'unification, et d'autre part que l'échelle de longueur de la corde doit être comparable à la longueur de Planck.

1. Théorie des cordes

Contrairement à la théorie quantique des champs où les objets fondamentaux sont considérés comme des particules ponctuelles de dimension nulle, la théorie des cordes les voit plutôt comme des objets étendus⁴ de dimension un possédant une tension T . De plus, certains de ces objets (cordes) sont fermés vus comme des boucles, d'autres sont ouverts assimilés à des petits segments avec des conditions aux bords de Dirichlet ou de Neumann². D'autre part, puisque la théorie des cordes est une théorie quantique relativiste qui inclut la gravité, alors elle doit susciter l'existence d'un lien entre les constantes fondamentales. Effectivement, la vitesse de la lumière c , h la constante de Planck et G la constante gravitationnelle de Newton sont tous reliées dans les formules suivantes.

- L'échelle de Planck:

$$l_p = \left(\frac{hG}{2\pi c^3} \right)^{\frac{3}{2}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{ cm} \quad (2.1)$$

- La masse de Planck:

$$m_p = \left(\frac{hc}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2. \quad (2.2)$$

Lors de son mouvement, la corde bosonique (soit fermée ou bien ouverte) balaye une surface bidimensionnelle appelée surface d'univers. De cette propriété, il découle que la théorie classique des cordes peut être considérée comme une théorie des champs bidimensionnelle conforme. Par suite, au niveau quantique, les contraintes d'invariance conforme exigent que la dimension de l'espace-temps soit $D = 26$ au lieu de $(1 + 3)$ dimensions habituelles. Bien que cette théorie des cordes bosoniques possède d'importantes caractéristiques, elle n'est pas consistante en raison de:

1. La dimension critique $D = 26$.
2. L'absence des fermions nécessaires pour décrire la matière.
3. La présence du tachyon dans son spectre (particule de masse au carré négative).

2. Théorie des supercordes

Suite à tout ces problèmes fut introduite la théorie des supercordes. Elle est considérée comme une généralisation supersymétrique du modèle de la corde bosonique, et ceci en ajoutant des champs fermioniques sur la surface d'univers. Cette augmentation par des spineurs donne lieu à une symétrie plus riche à savoir la symétrie superconforme. De plus l'adjonction des champs fermioniques à la corde bosonique, qui sont à la fois des spineurs de Majorana à deux dimensions et des vecteurs de Lorentz, a pour conséquence la réduction de la dimension critique de 26 à 10 dimensions. Dans cette théorie, le problème du tachyon fut surmonté par la projection de Gliozzi, Sherk et Olive (GSO)^{2,3} qui consiste à supprimer quelques états de la théorie et par ailleurs, permet de se limiter à un sous espace des états du spectre où l'existence d'un nombre égal de particules bosoniques et fermioniques à chaque niveau d'excitation est garanti. Ce spectre des états non massifs de la supercorde aussi bien que de la corde bosonique contient un état non massif de spin 2 qui peut être identifié au médiateur des interactions gravitationnelles: le graviton.

Entre 1984-1985, apparut "la première révolution de la supercorde" qui a impliqué l'existence de 5 types de supercordes à $D=10$ classées comme suit:

(a)- Les supercordes ayant une supersymétrie d'espace-temps $\mathcal{N} = 1$ à dix dimensions comprenant:

1. La supercorde de type I avec un groupe de jauge $SO(32)$.

2. La supercorde hétérotique $SO(32)$.

3. La supercorde hétérotique $E_8 \times E_8$.

(b)- Les supercordes ayant une supersymétrie d'espace-temps $\mathcal{N} = 2$:

1. La supercorde non chirale type IIA.

2. La supercorde chirale type IIB.

3. Spectre des supercordes

Le spectre des états non massifs des cinq modèles contient le dilaton ϕ , dont $g_s = e^\phi$ est la constante de couplage de la théorie, le graviton de spin 2 et des tenseurs antisymétriques de jauge généralisant la notion du potentiel vecteur A_μ à des tenseurs antisymétriques³ $A_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ à $p+1$ indices ($(p+1)$ -formes, $p = 1, 2, \dots$). Plus précisément nous avons pour:

• Les théories type II

Le spectre totale de ces deux modèles est donné par:

i) Secteur bosonique: Ce secteur se scinde en deux types.

(α) Bosons **NS-NS**: Ces bosons sont les mêmes autant pour type IIA que pour type IIB. Ils sont répartis en un dilaton ϕ , un graviton $g_{\mu\nu}$ et un tenseur antisymétrique $B_{\mu\nu}$.

(β) Bosons **R-R**: Ceux-ci par contre dépendent du choix de chiralité relative des spineurs.

Dans le cas de la théorie IIA qui est non chirale, nous trouvons un vecteur de jauge A_μ et un tenseur 3-forme $C_{\mu\nu\rho}$ antisymétrique. Tandis que dans le cas de la théorie type IIB chirale, les bosons **R-R** sont formés d'un champ scalaire χ (axion), une 2-forme $\tilde{B}_{\mu\nu}$ antisymétrique et une 4-forme $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymétrique auto-duale.

ii) Secteur fermionique: Les deux secteurs fermioniques **R-NS** et **NS-R** sont identiques et contiennent un fermion et un gravitino.

• La supercorde hétérotique:

Dans ce type par contre le spectre bosonique est donné par:

$$(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi), \quad A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad (2.3)$$

avec $a = 1, \dots, \dim SO(32)$ ou $\dim E_8 \times E_8$. Alors que la partie fermionique est constituée du gravitino et du jaugino, partenaires supersymétriques du graviton et du champ de jauge respectivement dans la représentation adjointe du groupe de jauge.

• La théorie type I

Son spectre est obtenu à partir des supercordes type IIB. Il correspond au dilaton ϕ , graviton $g_{\mu\nu}$ du secteur de **NS-NS** de la théorie de type IIB, le tenseur antisymétrique $\tilde{B}_{\mu\nu}$ du secteur **R-R** des supercordes fermées, les champs de jauge $SO(32)$ du secteur des cordes ouvertes et leurs partenaires fermioniques sous la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à dix dimensions. La partie bosonique de ce modèle est donnée par

$$(g_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu}, \phi), A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad (2.4)$$

avec $a = 1, \dots, \dim SO(32)$. Nous notons que le spectre de la théorie type I est identique à celui de la théorie hétérotique de groupe de jauge $SO(32)$.

B. Compactification en théorie des supercordes

Afin que la théorie des supercordes décrive notre univers qui est seulement à $(3+1)$ dimensions non compactes, il s'est avéré nécessaire d'utiliser la méthode de compactification⁶. Ce procédé qui a vu le jour suite aux travaux successifs de Kaluza et Klein, suppose que certaines des dix dimensions sont compactes et non observables à notre échelle. De ce fait, il faudrait considérer des géométries où l'espace de Minkowski à 10 dimensions M_{10} se décompose en:

1. Une variété non compacte correspondant à l'espace-temps de Minkowski usuel M_4 .
2. Une variété compacte K_6 de dimension 6 et de volume très petit devant notre échelle d'observation,

$$M_{10} \rightarrow M_4 \times K_6. \quad (2.5)$$

Ce scénario s'étend même à des compactifications sur des variétés compactes K_d mais vers des espaces-temps arbitraires M_{10-d} . Cependant puisque un spineur à dix dimensions se décompose en un spineur sur l'espace K_d et un spineur à $(10-d)$, il en résulte que le nombre de supersymétries préservées à $(10-d)$ dimensions de l'espace-temps est égal au nombre de spineurs covariantiquement constants sur K_d . Par conséquent, ces espaces compacts K_d sont choisis de sorte qu'ils préservent un certain nombre de supersymétries des supercordes qui se propagent dans un espace-temps de dimension $(10-d)$. Par suite, les variétés K_d sont classées selon les différents modèles de supercordes résultants à $(10-d)$ dimensions⁴. Effectivement, parmi les multiples compactifications qui existent, nous citons trois des exemples

les plus utilisés en théorie des supercordes :

- La compactification toroïdale sur un tore T^d ayant un groupe d'holonomie trivial $U(1)^d$. Celle-ci conduit à un modèle avec 32 supercharges.
- La compactification sur l'hypersurface $K3$ de groupe d'holonomie $SU(2)$ préservant la moitié des supercharges initiales.
- La compactification sur des variétés de Calabi-Yau à six dimensions X_3 ayant un groupe d'holonomie $SU(3)$.

Ainsi, il est clair à présent que la compactification nous permet non seulement de décrire les différents modèles de supercordes à des dimensions inférieures mais aussi de réduire leurs nombres de charges supersymétriques.

D'autre part, la compactification des cinq modèles de supercordes déjà cités donne plusieurs théories dans les dimensions inférieures. Chacune de ces théories est paramétrisée par les modules suivants :

1. La constante de couplage de la supercorde $g_s = e^\phi$, où ϕ est la valeur moyenne du dilaton dans le vide.
2. Les modules géométriques de la variété complexe compacte dont le nombre provient des différents choix possibles de la métrique. Ce nombre est donné par les déformations de Kahler et les déformations de la structure complexe.
3. Les valeurs moyennes des champs antisymétriques des secteurs **NS-NS** et **R-R** et des champs de jauge.

Ces trois types de valeurs moyennes paramétrisent l'espace des modules de la théorie compactifiée. Dans la région de l'espace des modules où la constante de couplage est faible, la théorie perturbative est révélatrice. Alors que dans la région où la constante de couplage est forte, c'est plutôt le régime non perturbatif qui est dominant.

C. Dualité en théorie des supercordes

En dépit de ses succès majeurs, la théorie des supercordes connaît des doutes persistants puisqu'au lieu d'unifier les théories, nous nous trouvons devant cinq types de modèles consistants à dix dimensions. Par suite après compactification, un grand nombre de théorie des supercordes surgit aux dimensions inférieures. Heureusement, l'année 1995 donna naissance à "la seconde révolution de la théorie des supercordes" grâce à laquelle l'intérêt fut apporté à l'étude des symétries non perturbatives de ces théories. Dans ce contexte, les cinq

modèles qui apparaissaient différents dans leurs descriptions perturbatives (à faible couplage), sont en fait reliés à couplage fort par les différentes dualités des cordes.

Rappelons que ce concept de dualité déjà connu en mécanique quantique entre onde et corpuscule, signifiant l'existence de deux approches différentes du même système physique, joue un rôle important dans la théorie des supercordes en permettant la connection entre ses différents types⁴⁻⁶.

Voyons brièvement des exemples de symétrie de dualité.

1. Dualité-T

Cette dualité possède une conséquence intéressante dans le cas des théories type II. En effet considérons une théorie type II et compactifions la neuvième direction sur un cercle de rayon R . Alors la limite $R \rightarrow 0$ est équivalente à la limite $R' \rightarrow \infty$ pour la coordonnée duale avec $R' = \frac{\alpha'}{R}$. Cette symétrie signifie que la compactification sur un cercle de petit rayon est équivalente à la compactification sur un cercle de grand rayon et que les limites $R \rightarrow 0$ et $R' \rightarrow \infty$ sont physiquement identiques. De plus, cette dualité-T change la chiralité des états à mouvement gauche, et par conséquent transforme la théorie type IIA en type IIB et vice-versa.

Elle rend même les théories hétérotiques $SO(32)$ et $E_8 \times E_8$ équivalentes à neuf dimensions.

Ainsi la dualité-T qui est une symétrie perturbative résultante d'une compactification à des dimensions inférieures, relie deux théories différentes dans la même région de faible couplage.

2. Dualité-S

Cette dualité par contre relie deux régimes de couplages différents. Elle est donnée par l'inversion du couplage g_s , ce qui signifie que

$$g_s \longrightarrow \frac{1}{g_s}. \quad (2.6)$$

Cette symétrie de dualité nous permet de décrire le couplage fort (faible) d'une théorie à l'aide du régime à couplage faible (fort) de sa théorie duale. A dix dimensions, la théorie hétérotique $SO(32)$ et la théorie type I $SO(32)$ sont équivalentes par inversement de couplage de la corde $g_{het} \leftrightarrow \frac{1}{g_{type I}}$. D'autre part la dualité-S permet l'échange de la constante de couplage $g_{IIB} \leftrightarrow \frac{1}{g_{IIB}}$ de la théorie type IIB qui est dite auto-duale sous la symétrie

$Sl(2, \mathbf{Z})$.

En conclusion, les deux théories $\mathcal{N} = 2$ et les trois théories $\mathcal{N} = 1$ sont séparément connectées par le biais de ces deux dualités. Mais En pratique^{4,5}, il se trouve que le cas le plus important de dualité corde-corde est celui reliant la supercorde IIA sur une variété $K3$ et la supercorde hétérotique sur un tore T^4 . Ces deux modèles présentent le même espace des modules

$$\mathbf{R}^+ \times \frac{SO(20, 4, \mathbf{R})}{SO(20) \times SO(4)} \quad (2.7)$$

et la symétrie de jauge perturbative des supercordes hétérotiques sur T^4 est identifiée avec les singularités de $K3$. Ainsi cette dualité permet de relier les théories $\mathcal{N} = 1$ et $\mathcal{N} = 2$ à six dimensions.

D. Théorie-M

1. Introduction

L'une des conséquences majeures de l'étude de la dualité entre les cinq modèles de supercordes perturbatives à dix dimensions, est le fait qu'on peut les voir comme des limites non perturbatives d'une seule théorie appelée **théorie-M** à onze dimensions.

La lettre " M " a plusieurs interprétations parmi lesquelles:

-Magique ou Mystérieuse.

-Membrane puisqu'elle contient M2-brane.

-Mother comme mère de toute les théories.

-Matrice comme une autre approche possible de la théorie.

Selon Witten, cette théorie-M est décrite à faible énergie par une théorie de supergravité à onze dimensions ayant 32 supercharges conservées ($\mathcal{N} = 1$).

Construite en 1978 par Cremmer, Julia et Sherk la supergravité possède 3 types de champs:

1. Le graviton g_{MN} (avec 44 polarisations).
2. Le tenseur de jauge (3-forme) C_{MNP} (avec 84 polarisations).
3. Le gravitino Ψ_M^a (avec 128 polarisations).

Ces champs constituent le **"supermultiplet gravitationnel"**. En plus de ces champs, le spectre de la théorie-M (supergravité à faible énergie)

contient également des objets solitoniques nommés M2-branes qui se couplent à C_{MNP} , et leurs duals magnétiques M5-branes.

Cette théorie supersymétrique qui est généralement covariante possède une invariance de jauge sous laquelle:

$$\delta C = d\lambda \quad (2.8)$$

avec λ est une 2-forme. Ainsi le champ invariant de jauge est la dérivée de C que nous notons F .

L'action des champs bosoniques est donnée par

$$S = \int \sqrt{g} R - \frac{1}{2} F \wedge *F - \frac{1}{6} C \wedge F \wedge F. \quad (2.9)$$

Par conséquent les équations de mouvement de C et g prennent les formes

$$d * F = F \wedge F \quad (2.10)$$

et

$$R_{MN} = T_{MN} (C) \quad (2.11)$$

où T est le tenseur énergie-impulsion du champ C .

2. Théorie-M et théorie des supercordes

(a) Théorie-M et théorie type IIA

Contrairement à type IIB, la théorie type IIA n'a pas de symétrie reliant les couplages fort et faible. Il a été conjecturé que la limite à couplage fort de la théorie type IIA n'est pas une théorie à dix dimensions, mais plutôt une théorie à onze dimensions qui est la théorie-M⁷. Pour expliquer cette relation existante entre ces deux théories, nous identifions le spectre qui caractérise chacune d'elles à dix dimensions.

La compactification de la théorie-M sur un cercle de rayon R_{10} qui est donné par:

$$R_{10} = l_{11} g_s^{\frac{2}{3}} \quad (2.12)$$

avec g_s est la constante de couplage de la théorie type IIA et $l_{11} = \alpha' g_s^{\frac{1}{3}}$ est l'échelle de Plank à onze dimensions. Ainsi le rayon R_{10} de la onzième dimension est bien relié à g_s de type IIA.

De plus pour $M, N, P = 0, \dots, 10$ et $\mu, \nu, \rho = 0, \dots, 9$, cette compactification se résume comme suit:

-La métrique à onze dimensions g_{MN} se réduit en:

1. La métrique $g_{\mu\nu}$ à dix dimensions.
2. Le champ de jauge $g_{\mu 10} = A_\mu$.

3. Le dilaton $\phi = g_{1010}$.

En terme de nombre de degré de liberté ceci s'exprime par

$$44 = 35 \oplus 8 \oplus 1. \quad (2.13)$$

-Le tenseur de jauge C_{MNP} donne à son tour par la réduction dimensionnelle:

1. La 3-forme $C_{\mu\nu\rho}$.
2. La 2-forme $B_{\mu\nu} = C_{\mu\nu 10}$,

D'où nous pouvons l'écrire comme suit:

$$84 = 56 \oplus 28. \quad (2.14)$$

Par conséquent, ces champs coïncident avec les champs bosoniques de la théorie type IIA dans ses deux secteurs **R-R** et **NS-NS**. Autrement dit, à faible couplage $g_s \rightarrow 0$ et ($R_{10} \rightarrow 0$) nous obtenons la théorie type IIA à dix dimensions. Tandis qu'à fort couplage $g_s \rightarrow \infty$ le rayon de compactification devient infini ($R_{10} \rightarrow \infty$), alors nous retrouvons une théorie dont la onzième dimension est non compacte et qui n'est autre que la théorie-M.

D'autre part, puisque le spectre non massif de la théorie-M contient aussi des objets non perturbatifs, alors il faut s'attendre à retrouver les branes de la théorie type IIA après la réduction dimensionnelle sur un cercle vers dix dimensions.

En effet,

- ◊ la M-2 brane transverse à la direction compacte est l'origine de D-2 brane à D=10.
- ◊ la M-2 brane enveloppée autour de la dimension compacte donne la corde fondamentale.
- ◊ La M-5 brane transverse à la onzième dimension donne lieu à NS-5 brane.
- ◊ La M-5 brane enveloppée autour de la dimension compacte produit la D-4 brane.
- ◊ Par contre la D-0 brane (duale de D-6 brane) est couplée à $g_{\mu 10}$.

Ainsi tous les objets perturbatifs et non perturbatifs de type IIA sont obtenus à partir de la théorie-M.

(b) *Théorie-M et corde hétérotique $E_8 \times E_8$*

Une autre approche pour mieux comprendre la théorie-M est de considérer son comportement sur une orbifold particulière à onze dimension $\frac{S^1}{Z_2}$, où Z_2 agit sur S^1 comme inversion de $x^{11} \rightarrow -x^{11}$. L'espace résultant est vu comme un segment de points fixes 0 et π .

La théorie-M sur $R^{10} \times \frac{S^1}{Z_2}$ se réduit dans le cas de basse énergie à une théorie de supergravité à $D = 10$ avec $\mathcal{N} = 1$. Or, il y a trois théories de supercordes possédant cette structure à basse énergie,

- Hétérotique $E_8 \times E_8$.
- Hétérotique et type I ayant chacune $SO(32)$ comme groupe de jauge.

Ainsi, si le rayon de S^1 tend vers 0, la théorie-M sur $R^{10} \times \frac{S^1}{Z_2}$ se réduit sûrement à l'une de ces trois théories.

Selon Horava et Witten⁷, cette théorie ne peut être que la corde hétérotique $E_8 \times E_8$. Puisque la construction de cet orbifold entraîne génériquement l'existence d'états twistés localisés sur les deux points du segment. Alors physiquement ceci peut être interprété comme l'existence des D9-branes à chaque extrémité du segment. Ainsi elles portent des degrés de liberté de jauge qui nous indiquent que les groupes de jauge possibles à $D = 10$ $\mathcal{N} = 1$ doivent avoir une dimension 496. Et du fait que nous avons deux hyperplans fixés à $x = 0$ et $x = \pi$ donc la dimension est exactement 248 qui n'est autre que celle de E_8 .

Finalement, la théorie-M sur l'orbifold déjà citée est reliée à la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ avec un E_8 se propageant en chacun des deux hyperplans qui forment les bords de l'espace-temps.

En conclusion, si la dualité-S nous a permis de déterminer la limite de couplage-fort des modèles type IIB, type I et hétérotique $SO(32)$ et bien seule l'introduction de la théorie-M, qui est à $D = 11$, est capable de déterminer la limite de couplage-fort des modèles type IIA et hétérotique $E_8 \times E_8$. Ainsi cette théorie permet de faire appel à la physique non perturbative des cinq théories des supercordes dans laquelle, les cinq modèles qui apparaissent différents dans leurs descriptions perturbatives faiblement couplées, sont en fait reliés à couplage fort par le procédé de dualité.

III. COMPACTIFICATION DE LA THÉORIE-M

Dans la section précédente, nous avons constaté que les symétries de dualité ont conduit à une révolution dans la conception des théories des supercordes, puisqu'elles nous ont permis de voir les cinq modèles des supercordes comme des manifestations d'une seule théorie qui est la théorie-M. Or étant donné que cette dernière est décrite à faible énergie par une théorie de supergravité à onze dimensions. Alors il sera intéressant d'essayer de la ramener à une théorie ayant un nombre minimal de supercharges et se propageant au monde réel à 3+1 dimensions habituelles. De ce fait, nous avons besoin de compactifier sur une variété de dimension

sept. Mais avant d'aborder cette réduction dimensionnelle qui nécessite l'introduction d'une variété de groupe d'holonomie \mathbf{G}_2 , nous allons en premier lieu utiliser l'un des résultats remarquables offerts par la dualité⁴ reliant la supercorde IIA sur une variété $K3$ et la supercorde hétérotique sur un tore T^4 . Ce résultat n'est autre que la relation entre la théorie-M et la corde hétérotique à sept dimensions.

A. Dualité entre théorie-M et corde hétérotique à sept dimensions

La théorie-M compactifiée sur $K3$ est équivalente⁸ à la corde hétérotique sur un tore T^3 . Afin d'explicitier ce résultat, commençons tout d'abord par rappeler que $K3$ est une variété Kahlérienne compacte de dimension réelle 4 et de courbure de Ricci nulle⁹. Elle a pour groupe d'holonomie le groupe $SU(2)$ qui assure l'existence de spineurs covariantement constants. De plus la compactification sur $K3$ préserve la moitié des charges supersymétriques initiales. Localement, cette variété a pour espace des modules:

$$\mathcal{M}(K3) = \mathbf{R}^+ \times \frac{SO(3, 19)}{SO(3) \times SO(19)} \quad (3.1)$$

qui contient 58 paramètres réels et où \mathbf{R}^+ correspond à un facteur d'échelle global de la métrique de $K3$, qui peut être vu comme le volume de $K3$.

Dans un point régulier de $\mathcal{M}(K3)$, les modules géométriques de $K3$ suffisent pour décrire la compactification de la théorie-M sur cet espace. Effectivement à sept dimensions, nous retrouvons exactement 58 champs scalaires non massifs qui ne sont autres que les fluctuations de la métrique sur $K3$, surtout que la 3-forme ne génère aucun degré de liberté supplémentaire sur $K3$ puisque $b_3(K3) = 0$. D'autre part, en plus de la métrique et la 3-forme, le groupe $H^2(K3, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{22}$ indique l'existence de 22 classes linéairement indépendantes des 2-formes harmoniques. Ainsi nous avons un groupe de jauge $U(1)^{22}$ caractérisant les 22 champs de jauge résultants à sept dimensions. Et puisque $b_1(K3) = 0$, ce fait exige que le spectre donné est le spectre complet du modèle obtenu à sept dimensions ayant 16 supercharges.

Reste maintenant à prouver qu'il s'agit exactement du même spectre que celui de la théorie de la corde hétérotique sur T^3 .

Rappelons qu'à dix dimensions, la corde hétérotique a les champs bosoniques non massifs suivant: une métrique, une 2-forme B , un dilaton ϕ et des champs de jauge non abéliens de groupe de

structure $SO(32)$ ou $E_8 \times E_8$. De plus, elle possède 16 supercharges globales qui restent préservées lors de la compactification sur un tore T^3 . Ainsi une métrique plate sur T^3 donne lieu à six scalaires non massifs. Ceux-ci sont joints par trois de plus provenant du champs B et qui sont caractérisés par les trois 2-formes harmoniques indépendantes dans T^3 . D'autre part, pour que les champs de jauge sur T^3 soient supersymétriques, il faut que leurs champs de forces s'annulent. Autrement dit il faut qu'ils aient des connections plates surtout qu'ils sont paramétrisés par les lignes de Wilson autour des trois cercles indépendants du tore. Ainsi les bosons de jauge fournissent après la compactification toroïdale 16×3 modules associées aux lignes de Wilson. Dans notre cas le tore maximal, du groupe de jauge, duquel provient les connections plates des champs est $U(1)^{16}$.

Il est clair à présent que le nombre total des scalaires est 58. D'où localement selon Narain, l'espace des modules a la même forme que celui de (3.1) avec \mathbf{R}^+ qui paramétrise dans ce cas les valeurs possibles de la constante de couplage de la corde. Ajoutons que le groupe de jauge à sept dimensions (pour la métrique et le champ B) est un sous-groupe de $SO(32)$ ou de $E_8 \times E_8$ qui commute avec les connections plates de T^3 . Plus exactement ce groupe de jauge est le groupe abélien $U(1)^{16}$. En plus, les trois 1-formes harmoniques de T^3 impliquent 3 champs de jauge $U(1)$ produit par le champ B auxquels s'ajoutent trois autres donnés par la métrique.

Finalement, nous concluons que dans un point générique de l'espace des modules \mathcal{M} , les théories de supergravité à basse énergie résultantes soit de la compactification de la théorie-M sur $K3$ ou de la corde hétérotique sur T^3 sont les mêmes.

B. Théorie-M à quatre dimensions

Comme nous l'avons déjà mentionné, la théorie-M est considérée comme "mère" des cinq théories des supercordes. Par conséquent, il est évident qu'elle soit duale à la corde hétérotique à sept dimensions aussi bien qu'elle contribue dans la description des différentes théories de supercordes dans des dimensions inférieures à dix. De ce fait, plusieurs questions s'imposent et persistent surtout que notre objectif fondamental est d'atteindre les quatre dimensions de l'espace-temps $\mathbf{R}^{1,3}$.

Ainsi dans le but de compléter notre étude tout en répondant aux différentes questions, nous commençons tout d'abord par dévoiler certaines des caractéristiques et des propriétés de la variété compacte qui nous permettra d'aboutir un modèle à

quatre dimensions avec un nombre minimal de supercharges.

1. Variations supersymétriques

Puisque la théorie-M est une théorie supersymétrique, alors il est naturel de chercher ses vides supersymétriques. Dans le cas de la théorie classique, ceci revient juste à trouver les conditions pour lesquelles les variations supersymétriques des trois champs, qui constituent le supermultiplet gravitationnel, s'annulent. Mais, le fait que sous la transformation de Lorentz la valeur moyenne dans le vide du champ ψ doit être nulle incite les variations des champs g et C à s'annuler automatiquement.

Ainsi, il reste à attribuer aux champs C et à la métrique g des valeurs pour les quelles la variation de ψ soit nulle:

$$\begin{aligned}\delta\psi_N &\equiv \nabla_N \eta \\ &+ \frac{1}{288} \left(\Gamma_N^{PQRS} F_{PQRS} - 6\Gamma^{PQR} F_{NPQR} \right) \eta \\ &= 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Il est clair à présent que la façon la plus simple pour résoudre ces équations est d'octroyer à F la valeur zéro ($F = 0$). Dans ce cas, nous devons chercher une variété à onze dimensions avec une métrique g qui admet un spineur covariantiquement constant (ou un spineur parallèle):

$$\nabla_N \eta = 0 \quad (3.3)$$

Cette équation peut être réécrite sous une forme plus symbolique

$$\nabla_g \eta = 0, \quad (3.4)$$

où ∇_g est la connection de Levi-Civita construite à partir de g .

Ainsi, les solutions pour ces conditions peuvent être classées via le groupe d'holonomie de la connection ∇_g .

2. Groupe d'holonomie

Le groupe d'holonomie d'une connection agissant sur un champ comme η ou sur un champ vecteur, se comprend en terme du transport parallèle.

Pour une variété Riemannienne à onze dimensions, considérons une courbe fermée autour de laquelle le champ est transporté. Alors dans le cas où la connection est une connection de Levi-Civita, le

champ revient à son point de départ grâce à une rotation du groupe $SO(1, n-1)$ qui est exactement $SO(1, 10)$ pour la théorie-M. Le groupe généré par l'ensemble des rotations responsables du transport parallèle du champs autour des courbes fermées de la variété est nommé groupe d'holonomie de ∇_g . Ce groupe est noté $Hol(g)$ puisqu'il dépend du choix de la métrique g .

En effet, si nous n'imposons aucune condition sur g , alors pour notre modèle $Hol(g) = SO(1, 10)$. Par contre pour un choix particulier de g , $Hol(g)$ est un sous groupe propre de $SO(1, 10)$.

Or, rappelons que notre but majeur dans cette section est d'atteindre un modèle se propageant dans l'espace à quatre dimensions à partir de la théorie-M à onze dimensions. C'est pourquoi, nous allons consacrer la suite de cette section à l'étude de la variété qui nous permettra d'aboutir à notre fin.

3. Variété d'holonomie G_2

A ce stade, il est clair que seule la compactification sur une variété compacte de dimension sept X peut fournir un modèle dans "notre espace-temps":

$$R^{1,10} \longrightarrow R^{1,3} \times X \quad (3.5)$$

En particulier, la métrique g à onze dimensions s'écrit comme produit de deux métriques l'une de X notée $g'(X)$ et l'autre de Minkowski $R^{1,3}$.

Dans ce cas, le groupe de Lorentz de l'espace-temps à onze dimensions se brise explicitement sous la forme suivante:

$$SO(1, 10) \longrightarrow SO(1, 3) \times SO(7) \quad (3.6)$$

où $SO(1, 3)$ est le groupe de Lorentz à quatre dimensions.

Après cette brisure, les conditions supersymétriques sont satisfaites si la métrique $g'(X)$ admet un spineur θ obéissant la relation:

$$\nabla_{g'(X)} \theta = 0 \quad (3.7)$$

en choisissant

$$\eta = \theta \otimes \epsilon \quad (3.8)$$

où ϵ est une base de spineurs constants dans l'espace de Minkowski.

Dans ce cas, la condition (3.7) impose au groupe d'holonomie de la variété compacte X de dimension sept, que nous notons $Hol(g'(X))$, d'être un sous groupe de $SO(7)$.

Ce fait permet à la variété X d'être réalisée de plusieurs manières impliquant ainsi différents modèles à quatre dimensions. A titre d'exemple, considérons les trois réalisations suivantes:

- $X = T^7$ qui a pour groupe d'holonomie $U(1)^7$. Le modèle obtenu à quatre dimensions possède 32 supercharges d'où $\mathcal{N} = 8$.
- $X = K3 \times T^3$ le modèle résultant dans ce cas a 16 supercharges càd $\mathcal{N} = 4$.
- $X = CY^3 \times S^1$ donne à quatre dimensions une théorie avec 8 supercharges $\mathcal{N} = 2$.

Mais notre objectif est de retrouver un modèle à quatre dimensions avec un nombre de supercharges minimales (càd 4 charges supersymétriques ce qui implique $\mathcal{N} = 1$), après la compactification de la théorie-M à onze dimensions possédant 32 supercharges. Alors le choix de la variété X doit être très particulier.

Parmi toutes les réalisations possibles de X , seule une variété ayant le groupe d'holonomie \mathbf{G}_2 qui est le sous groupe propre maximal de $SO(7)$ peut avoir une représentation spinorielle contenant un singlet⁸.

De façon explicite

$$\begin{aligned} SO(1, 10) &\longrightarrow SO(1, 3) \times SO(7) \\ 32 &\longrightarrow (4, 8) \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec 8 est la représentation spinorielle de $SO(7)$ qui se décompose en un singlet et une représentation fondamentale de \mathbf{G}_2 que nous écrivons:

$$8 \longrightarrow 1 + 7. \quad (3.10)$$

Ainsi (3.9) se réécrit comme suit:

$$\begin{aligned} SO(1, 10) &\longrightarrow SO(1, 3) \times SO(7) \\ 32 &\longrightarrow (4, 1) \oplus (4, 7) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Nous déduisons alors que seule la compactification de la théorie-M sur une variété compacte de dimension sept ayant un groupe d'holonomie \mathbf{G}_2 permet de réaliser un modèle à quatre dimensions possédant un nombre minimal de supercharges, plus exactement quatre supercharges d'où $\mathcal{N} = 1$ et pas plus.

4. Propriétés des variétés d'holonomie G_2

Il est vrai que la métrique $g'(X)$ choisit précédemment admet θ comme spineur parallèle. Mais ceci n'empêche de construire d'autres champs de X qui soient covariantiquement constants⁸.

Ainsi toutes p -formes ayant les composantes suivantes:

$$\theta^T \Gamma_{i_1 \dots i_p} \theta \quad (3.12)$$

peuvent être parallèles par respect de $\nabla_{g'(X)}$. Cependant ces p -formes ne sont non nulles que pour des valeurs bien distinctives de p et qui ne sont autres que: 0, 3, 4 et 7. Ceci est dû au fait que la décomposition de la représentation antisymétrique de $SO(7)$ en terme des représentations de \mathbf{G}_2 contenant le singlet n'est valable que pour ces quatre valeurs de p . D'autre part, en plus de la 0-forme qui n'est autre qu'une constante dans X et la 7-forme qui est sa forme volume, la 3-forme ainsi que son duale la 4-forme jouent un rôle primordial. Selon^{10,11}, la 3-forme est considérée comme l'ensemble des structures constantes pour l'algèbre d'octonion, permettant de ce fait à \mathbf{G}_2 d'être le groupe d'automorphisme de cette algèbre.

Pour mieux explicite cette idée, nous allons étudier de près l'importance de la 3-forme en considérant tout d'abord, un système de coordonnées (x_1, \dots, x_7) dans un espace plat \mathbf{R}^7 . Notons la forme extérieure $dx_i \wedge \dots \wedge dx_l$ de \mathbf{R}^7 par $dx_{i \dots l}$ et définissons une métrique g'_0 , une 3-forme φ_0 et son dual de Hodge la quatre forme $\star\varphi_0$ comme suit:

$$\begin{aligned} g'_0 &= dx_1^2 + \dots + dx_7^2 \\ \varphi_0 &= dx_{123} + dx_{145} + dx_{167} + dx_{246} \\ &\quad - dx_{257} - dx_{356} - dx_{347} \\ \star\varphi_0 &= dx_{4567} + dx_{2367} + dx_{2345} + dx_{1357} \\ &\quad - dx_{1346} - dx_{1256} - dx_{1247} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alors, le sous-groupe de $Gl(7, \mathbf{R})$ qui préserve φ_0 n'est autre que le groupe de Lie exceptionnel \mathbf{G}_2 . Il préserve aussi la 4-forme $\star\varphi_0$ ainsi que g'_0 la métrique euclidienne.

Le groupe de Lie \mathbf{G}_2 est compact, semi-simple et de dimension 14. De plus, c'est le sous-groupe maximal de $SO(7)$. Dans ce cas, φ_0 et $\star\varphi_0$ définissent la structure- \mathbf{G}_2 dans \mathbf{R}^7 .

Par la suite, intéressons-nous au cas où la variété X de dimension sept est courbée. Alors la géométrie est déterminée par une 3-forme φ stable par \mathbf{G}_2 , de sorte que tout espace tangent $T_p(X)$ à X en un point p admet un isomorphisme avec \mathbf{R}^7 . Celui-ci identifie φ et la métrique $g'(X)$ avec φ_0 et g_0 respectivement. D'autre part, pour l'algèbre d'Octonion où

$$\tilde{o} = x^0 1 + x^a i_a, \quad (3.14)$$

le groupe exceptionnel \mathbf{G}_2 est son groupe d'automorphisme. Effectivement pour une 3-forme φ qui est défini localement, les éléments i_a satisfont la formule

$$i_a i_b = -\delta_{ab} + \varphi_{abc} i_c \quad (3.15)$$

suite à laquelle ImO qui est la partie imaginaire de l'algèbre d'Octonion est considérée comme une

copie de l'espace tangent en un point de la variété X .

Par ailleurs, vu l'importance de cette 3-forme φ , la structure- \mathbf{G}_2 est notée par la paire (φ, g') . Par conséquent, la variété X d'holonomie \mathbf{G}_2 est définie par le triplet (X, φ, g') où X est la variété de dimension sept dans laquelle la structure- \mathbf{G}_2 est de torsion libre[†].

Dans ce cas, on a les propriétés suivantes:

1. Le triplet (X, φ, g') est une variété d'holonomie \mathbf{G}_2 si X est une variété de dimension sept et (φ, g') est la structure- \mathbf{G}_2 de torsion libre dans X .
2. Si g' a une holonomie $Hol(g'(X)) = G_2$ alors g' est Ricci-plate.
3. La variété X de dimension sept et d'holonomie \mathbf{G}_2 possède un groupe fondamental π_1 qui est fini. Par conséquent son premier nombre de Betti $b_1(X) = 0$. Cependant le troisième nombre de Betti $b_3(X)$ représente la dimension de l'espace des modules de $g'(X)$.
4. La compactification sur une variété d'holonomie \mathbf{G}_2 préserve $\frac{1}{8}$ des charges supersymétriques initiales.

5. Réduction de Kaluza-Klein

Nous avons vu jusqu'à présent que dans le cadre de la compactification de la théorie-M vers $D = 4$, seule une variété X régulière d'holonomie \mathbf{G}_2 assure l'obtention d'un modèle à quatre dimensions avec $\mathcal{N} = 1$. Nous complétons cette section par une description explicite de ce modèle en utilisant l'analyse de Kaluza-Klein¹²⁻¹⁴ pour les champs antisymétrique C et la métrique g .

a) L'analyse de Kaluza-Klein pour les champs C

Choisissons deux bases des formes harmoniques de $H^2(X)$ et de $H^3(X)$:

$$\{\beta^\gamma; \gamma = 1, \dots, b_2(X)\} \quad (3.16)$$

et

$$\{\omega^a; a = 1, \dots, b_3(X)\}. \quad (3.17)$$

Du fait que $b_1(X) = 0$, alors il n'y aura pas de sommation sur les 1-formes harmoniques de X . Ainsi l'ansatz pour C ne produit pas des 2-formes non massives à $D = 4$. Par conséquent, l'ansatz de Kaluza-Klein pour le champs C s'écrit dans les deux bases ω et β comme suit:

$$C = \sum_a \omega^a \phi_a(y) + \sum_\gamma \beta^\gamma A_\gamma(y) \quad (3.18)$$

Les A représentent les 1-formes de l'espace de Minkowski impliquant $b_2(X)$ champs de jauge abéliens, alors que les ϕ_a sont les champs scalaires dépendant des coordonnées y de l'espace de Minkowski à $D=4$.

Bien que les champs C produise $b_3(X)$ scalaires réels non massifs, il faut s'attendre selon la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à $D = 4$ à ce que l'analyse de Kaluza-Klein pour $g'(X)$ donne $b_3(X)$ scalaires supplémentaires à quatre dimensions. D'ailleurs pour l'algèbre supersymétrique $\mathcal{N} = 1$, toutes ses représentations qui contiennent un scalaire réel non massif, suscitent à avoir au total deux scalaires se combinant en scalaire complexe.

b) L'analyse de Kaluza-Klein pour $g'(X)$

La métrique $g'(X)$ de la variété X d'holonomie \mathbf{G}_2 obéit aux équations du vide d'Einstein:

$$R_{ij}[g'(X)] = 0 \quad (3.19)$$

avec R_{ij} est le tenseur de Ricci.

Alors l'obtention du spectre des modes zéro provenant de la métrique $g'(X)$ exige de lui chercher des fluctuations qui satisfont aussi aux équations (3.19).

Attribuons à ces fluctuations de la métrique la forme

$$g'_{ij}(x) + \delta g'_{ij}(x, y) \quad (3.20)$$

où $\delta g'_{ij}$ dépendent des coordonnées y de l'espace de Minkowski à $D = 4$ ainsi que des coordonnées x de la variété d'holonomie \mathbf{G}_2 . Ensuite, utilisons l'ansatz de Kaluza-Klein pour les fluctuations donné par la forme

$$\delta g'_{ij} = h_{ij}(x) \rho(y). \quad (3.21)$$

Ces fluctuations produisent des champs scalaires non massifs à quatre dimensions.

D'autre part, pour une variété de dimension sept et d'holonomie $SO(7)$, les h_{ij} sont des tenseurs symétriques d'ordre 2. Ils se transforment via la représentation de dimension **27**. Cette dernière reste irréductible même dans le cas de \mathbf{G}_2 . Par ailleurs dans une variété d'holonomie \mathbf{G}_2 , les 3-formes qui sont dans la représentation **35** de $SO(7)$ se décomposent sous l'action de \mathbf{G}_2 comme suit:

[†]Dire que la torsion $\nabla\varphi$ est libre revient à ce qu'elle vérifie la condition $\nabla\varphi = 0$ sur X avec ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique $g'(X)$.

$$35 \longrightarrow 1 + 7 + 27. \quad (3.22)$$

Permettant ainsi aux h_{ij} d'être considérés comme des 3-formes de X . Or, puisque φ est une 3-forme dans la représentation triviale, alors les ω sont des 3-formes dans la même représentation que h_{ij} . D'où les fluctuations de la structure- \mathbf{G}_2 s'écrivent:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi + \delta\varphi \\ &= \varphi + \sum_a \omega^a(x) \rho_a(y). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Par conséquent, les champs scalaires non massifs provenant des fluctuations de la métrique de X sont exactement au nombre de $b_3(X)$. Ainsi la combinaison des ϕ et ρ donne $b_3(X)$ scalaires non massifs notés $\Phi^a(y)$. De plus, les superpartenaires fermioniques pour tout ces champs résultants sont fournis par le biais de la réduction de Kaluza-Klein pour le gravitino.

En conclusion, la compactification de la théorie-M sur une variété X régulière d'holonomie \mathbf{G}_2 est une façon naturelle pour obtenir un modèle à $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ ayant un groupe de jauge abélien. Ce modèle est décrit par une théorie de supergravité $\mathcal{N} = 1$ couplée à $b_2(X)$ multiplets vectoriels abéliens et à $b_3(X)$ multiplets chiraux non massifs. Pourtant cette compactification peut bien offrir une théorie plus intéressante possédant un groupe de jauge non abélien et de la matière chirale, mais à condition que la variété X admette un certain type de singularités. Motivés par cette idée¹⁸, la construction de cette variété ainsi que l'étude de la physique localisée au voisinage des singularités de l'espace d'holonomie \mathbf{G}_2 fera l'objet de la section suivante.

IV. THÉORIE-M AU VOISINAGE DES SINGULARITÉS

Le but principal de cette section est de procéder à la construction d'une variété d'holonomie \mathbf{G}_2 qui nous attribue un modèle à quatre dimensions, possédant un groupe de jauge non abélien ainsi que de la matière chirale. En premier temps, nous utilisons comme argument de départ la dualité entre la théorie-M compactifiée sur $K3$ et la corde hétérotique sur T^3 . Cette étude de dualité nous présente une manière géométrique pour extraire les symétries de jauge non abéliennes dans le modèle de la théorie-M à partir de l'aspect singulier de $K3$. Ensuite nous réalisons en détail la variété X dont les singularités vont nous permettre d'obtenir un modèle de physique de particules à quatre dimensions.

A. Variété $K3$ et les singularités ADE

L'une des conséquences de l'étude complète de la dualité entre la théorie-M et la corde hétérotique est que de même que pour cette dernière, la théorie-M doit aussi posséder une symétrie non abélienne⁶. Cette symétrie est garantie par des points spéciaux de l'espace des modules de $K3$. Plus précisément, ceux où la variété $K3$ développe des singularités orbifold. De ce fait, nous concentrons notre intérêt dans cette sous-section à une réalisation géométrique bien particulière de $K3$. Exactement, celle où cette variété riemannienne de dimension quatre est décrite localement par l'orbifold \mathbf{R}^4/Γ où Γ est un sous-groupe discret et fini de $SO(4)$. Mais sachant que la supersymétrie est complètement non brisée sur tout l'espace des modules dans le cas de la corde hétérotique, alors les singularités orbifold de $K3$ doivent être choisies de sorte que la supersymétrie soit préservée là aussi. Ceci se traduit par la condition que Γ est un sous-groupe fini de $SU(2) \subset SO(4)$.

Par passage aux coordonnées complexes $\mathbf{C}^2 \equiv \mathbf{R}^4$, tout point de \mathbf{C}^2 est représenté par un vecteur à deux composantes sur lequel $SU(2)$ agit de façon standard comme suit:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où les sous-groupes finis de $SU(2)$ ont une classification décrite en termes des algèbres de Lie semi-simples et simplement lacées⁸: A_n , D_k , E_6 , E_7 et E_8 .

Dans ce contexte, les trois sous groupes exceptionnels correspondent aux trois groupes de Lie exceptionnel de type-E. Cependant A_n est liée à $SU(n+1)$ alors que D_k est associée à $SO(2k)$.

D'autre part, ces sous-groupes que nous notons par Γ_{A_n} , Γ_{D_k} et Γ_{E_i} sont décrits explicitement comme suit:

- $\Gamma_{A_{n-1}}$ est isomorphe à \mathbf{Z}_n (le groupe cyclique d'ordre n) et il est généré par:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi}{n}} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

- Γ_{D_k} est isomorphe à \mathcal{D}_{k-2} (le groupe diédral binaire d'ordre $4k-8$) et admet 2 générateurs α et σ donnés par:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{k-2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{k-2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

- Γ_{E_6} est isomorphe à \mathcal{T} (le groupe tétraédral binaire d'ordre 24) et qui possède deux générateurs de la forme:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi 7}{8}} & e^{\frac{2i\pi 7}{8}} \\ e^{\frac{2i\pi 5}{8}} & e^{\frac{2i\pi}{8}} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

- Γ_{E_7} est isomorphe à O (le groupe octaédral binaire d'ordre 48) ayant pour générateurs les deux de Γ_{E_6} et un troisième qui est:

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2i\pi 7}{8}} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

- Finalement, Γ_{E_8} est isomorphe à I (le groupe icosaédral d'ordre 120) avec deux générateurs:

$$\begin{pmatrix} -e^{\frac{2i\pi 3}{5}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{2i\pi 7}{8}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi 2}{5}} - e^{\frac{2i\pi 3}{5}}} & \frac{1}{e^{\frac{2i\pi 2}{5}} - e^{\frac{2i\pi 3}{5}}} \\ \frac{1}{e^{\frac{2i\pi 2}{5}} - e^{\frac{2i\pi 3}{5}}} & \frac{-e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{-2i\pi}{5}}}{e^{\frac{2i\pi 2}{5}} - e^{\frac{2i\pi 3}{5}}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Puisque seule la physique au voisinage des singularités orbifold de $K3$ nous intéresse, alors nous allons nous restreindre dans ce qui suit à une étude locale de la théorie-M sur $\mathbf{C}^2/\Gamma \times \mathbf{R}^{1,6}$. De plus, nous allons choisir le sous groupe Γ_{A_1} parmi tout les autres pour des raisons de simplicité. Ainsi dans ce cas, nous avons Γ_{A_1} qui est isomorphe à \mathbf{Z}_2 , est en fait le centre de $SU(2)$. Son générateur agit sur \mathbf{C}^2 comme suit:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Algébriquement, paramétrisons $\mathbf{C}^2/\Gamma_{A_1}$ en termes des coordonnées de \mathbf{C}^2 invariants par Γ_{A_1} que nous notons: u^2, v^2 et uv . Ensuite, nous donnons une transformation:

$$\mathbf{C}^2/\Gamma_{A_1} \longrightarrow \mathbf{C}^3 \quad (4.8)$$

et nous définissons les nouvelles coordonnées complexes:

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= iu^2 + iv^2 \\ z &= 2uv \end{aligned} \quad (4.9)$$

qui sont invariantes par la symétrie \mathbf{Z}_2 . Cette nouvelle paramétrisation décrit un modèle local singulier. Ce dernier est connu sous le nom de la singularité A_1 dans la classification des singularités des surfaces complexes:

$$A_1 : \mathcal{P}(x, y, z) = xy - z^2 = 0. \quad (4.10)$$

Pour un choix adéquat des variables x, y, z , l'équation complexe prend la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \quad (4.11)$$

Dans ce cas, (4.11) définit l'orbifold $\mathbf{C}^2/\Gamma_{A_1}$ comme une hypersurface singulière dans \mathbf{C}^3 . Par ailleurs, cette singularité peut être résolue par deux façons:

1. Par la déformation de la structure complexe en ajoutant un terme supplémentaire dans l'équation algébrique (4.11).
2. Par la déformation de la structure de Kahler en remplaçant le point singulier par une sphère.

Or la propriété d'auto-miroir de la variété $K3$ permet aux deux approches des déformations à être équivalentes. Ainsi, le traitement de la singularité par l'une ou l'autre déformation conduit à des variétés topologiquement identiques. Par conséquent, l'équation (4.11) après la résolution complexe devient:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu \quad (4.12)$$

Il est clair que la partie réelle de cette équation n'est autre qu'une 2-sphère dont l'aire finie est déterminée par la partie réelle de μ qui donne le rayon réel r . Par suite, lorsque r tend vers zéro, la sphère se contracte à une aire nulle. D'autre part, il se trouve que l'espace total de la déformation de la variété $\mathbf{C}^2/\Gamma_{A_1}$ n'est autre que le fibré cotangent de la 2-sphère et que nous notons par T^*S^2 . Afin de mieux illustrer cette idée, considérons les parties réelles l_i de x, y, z ainsi que leurs parties imaginaires p_i . Pour μ réel, nous obtenons les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \sum l_i^2 - \sum p_i^2 &= \mu \\ \sum l_i p_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

les l_i décrivent la sphère S^2 , alors que les p_i paramétrisent les directions tangentielles.

B. Théorie-M au voisinage des singularités ADE

Comme nous venons de le constater, la déformation de la singularité orbifold donne lieu à une 2-sphère de rayon r . Alors à sept dimensions¹⁵, un champ de jauge $U(1)$ est produit par le biais de

la réduction de Kaluza-Klein pour le champ antisymétrique C . De plus, la métrique d'holonomie \mathbf{G}_2 possède trois paramètres qui contrôlent l'aire de S^2 . Or puisque le multiplet vectoriel à sept dimensions contient exactement un champ de jauge et trois champs scalaires. Nous déduisons par analogie que le spectre non massif lorsque T^*S^2 est régulier n'est autre qu'un multiplet vectoriel abélien.

D'autre part dès que les scalaires varient vers zéro, ce qui signifie que la sphère se rétrécit à une aire nulle, une symétrie de jauge non abélienne apparaît. Cette dernière doit son existence à la dualité avec la corde hétérotique, tout en exigeant aux bosons W^\pm d'être non massifs au voisinage de la singularité A_1 . Ces bosons sont électriquement chargés sous le champ de jauge $U(1)$ qui provient de la 3-forme C . Or à $D = 11$, c'est la M2-brane qui est chargé sous C . Portant une tension, la dynamique de cette brane l'incite à enrouler la sphère dans l'espace. Ainsi à sept dimensions cet enroulement génère une particule chargée sous $U(1)$ qui porte une masse proportionnelle à l'aire du volume de S^2 . Plus encore, une charge $U(1)$ opposée à la précédente est produite du fait que la M2-brane enroule ce 2-cycle même dans l'orientation opposée. Par suite, dans la limite singulière de $K3$ où le volume de la sphère se contracte à zéro, les deux multiplets BPS chargés de façon opposée deviennent non massifs. Ceux-ci provoquent l'apparition d'une symétrie de jauge $A_1 = SU(2)$ à partir de $U(1)$.

Par conséquent le problème de la symétrie de jauge non abélienne dans la théorie-M est rattachée à l'étude de la singularité A_1 de $K3$.

En outre, à sept dimensions la théorie de super Yang-Mills dépend seulement de son groupe de jauge. Par ailleurs en absence de la gravité, la physique à basse énergie de la théorie-M sur $\mathbf{C}^2/\Gamma_{A_1} \times \mathbf{R}^{1,6}$ est décrite par la théorie de super Yang-Mills sur $\mathcal{O} \times \mathbf{R}^{1,6}$ avec un groupe de jauge $SU(2)$.

Dans le but de rendre l'étude plus complète, il s'est avéré nécessaire de procéder à une généralisation. En effet en absence de la gravité, la physique à basse énergie de la théorie-M sur $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE} \times \mathbf{R}^{1,6}$ est décrite par la théorie de super Yang-Mills sur $\mathcal{O} \times \mathbf{R}^{1,6}$ ayant un groupe de jauge associé à l'une des algèbres de Lie ADE . Particulièrement la déformation de la singularité orbifold dans $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE}$ contient k 2-sphères avec $k = \text{rang}(ADE)$. L'intersection de ces sphères s'effectue en concorde avec la matrice de Cartan des algèbres de Lie ADE . Par contre aux points réguliers de l'espace des modules, le groupe de jauge n'est autre que $U(1)^k$.

En conclusion, à sept dimensions la théorie à basse énergie acquiert un groupe de jauge non abélien lié aux ADE , à l'origine de l'espace des modules, et ceci grâce au mécanisme de Higgs.

C. Théorie de jauge à quatre dimensions

Rappelons que l'idée principale de cette section est de retrouver un modèle physique à quatre dimensions, résultant de la compactification de la théorie-M sur la variété X qui possède un certain type de singularités. Ainsi en se basant sur ce qui précède, nous considérons un espace-temps $Y^{1,6}$ à sept dimensions le long duquel sont implantées des singularités ADE . Alors comme nous venons de le constater auparavant dans le contexte de la dualité à $D = 7$, la description de la physique de la théorie-M au voisinage de Y s'effectue en terme de la théorie de super Yang-Mills avec un groupe de jauge déterminé par le type de singularité donné. Par conséquent il est clair à présent que la réalisation de la physique de la théorie-M compactifiée vers quatre dimensions, revient à l'étude de la dynamique de la théorie de jauge dans l'espace $W \times \mathbf{R}^{1,3}$ en absence de la gravité^{8,17,18}. Au voisinage de cet espace qui n'est autre que Y , la variété X d'holonomie \mathbf{G}_2 admet la réalisation:

$$X = \mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE} \times W \quad (4.14)$$

où W caractérise une variété de dimension trois réelle sur laquelle les singularités ADE sont localisées.

1. Spectre à quatre dimensions

Avant d'aborder le spectre à quatre dimensions, commençons en premier lieu par préciser qu'à sept dimensions, le groupe de symétrie global de la théorie de super Yang-Mills provenant de la corde hétérotique sur T^3 est $SO(3) \times SO(1,6)$. Le premier facteur présente la R-symétrie tandis que le second n'est autre que le groupe de Lorentz.

Dans la représentation adjointe du groupe de jauge, les champs de la théorie se transforment comme suit:

$$\begin{aligned} \text{Les champs de jauge} &\longrightarrow (1, 7) \\ \text{Les scalaires} &\longrightarrow (3, 1) \\ \text{Les fermions} &\longrightarrow (2, 8). \end{aligned} \quad (4.15)$$

De plus, les 16 supercharges se transforment aussi,

$$16 \longrightarrow (2, 8). \quad (4.16)$$

Pour W arbitraire, le groupe de symétrie dans $W \times \mathbf{R}^{1,3}$ se brise en

$$SO(3) \times SO(3)' \times SO(1,3). \quad (4.17)$$

$SO(3)'$ est le groupe de structure du fibré tangent à W , alors que $SO(3)$ agit sur la fibre normale à W dans X . Dans ce cas à quatre dimensions, les charges supersymétriques se transforment en:

$$(2, 2, 2) + (2, 2, \bar{2}). \quad (4.18)$$

Pour $D = 4$, la physique est décrite par une théorie de jauge qui n'est pas supersymétrique puisque W est une variété courbée de dimension 3. Mais localement, pour que $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE}$ soit d'holonomie \mathbf{G}_2 il faut que cette théorie soit supersymétrique. En effet ceci apparaît clairement lorsque nous traitons la structure- \mathbf{G}_2 . Pour cette raison, considérons tout d'abord la structure $SU(2)$ de $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE}$. Cet espace à quatre dimensions et d'holonomie $SU(2)$ est une variété hyper-kählérienne qui admet trois 2-formes ω_i parallèles. Celles-ci se transforment localement sous l'action de $SO(3)$. Ainsi dans \mathbf{C}^2 , ces 2-formes sont explicitement données par:

$$\begin{aligned} \omega_1 + i\omega_2 &= du \wedge dv \\ \omega_3 &= \frac{i}{2} du \wedge d\bar{u} + dv \wedge d\bar{v} \end{aligned} \quad (4.19)$$

et sont préservées par Γ_{ADE} .

D'autre part, l'espace des modules des métriques d'holonomie $SU(2)$ coïncide avec l'espace des modules de la théorie de jauge possédant l'action $SO(3)$ (voir (3.1)). Pour cette raison, le groupe de rotation des 2-formes est identifié avec le facteur $SO(3)$ de la théorie de jauge à sept dimensions.

Par ailleurs dans un repère plat e_i de W , la structure- \mathbf{G}_2 de $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE}$ prend la forme:

$$\varphi = \frac{1}{6} \omega_i \wedge e_j \delta^{ij} + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \quad (4.20)$$

Cette formule est invariante par $SO(3)$ à condition que ce groupe agit sur les e_i de la même façon qu'il agisse sur les ω_i . Cependant, $SO(3)'$ agit aussi sur les e_i puisqu'il est le groupe de structure du fibré tangent de W . Ainsi il doit être identifié avec $SO(3)$ afin que $\mathbf{C}^2/\Gamma_{ADE}$ admette une métrique d'holonomie \mathbf{G}_2 .

Cette identification suscite la brisure des symétries en sous-groupe diagonal $SO(3)''$ des deux $SO(3)$, incitant la théorie à quatre dimensions à être supersymétrique. Après cette brisure, le groupe de symétrie devient:

$$SO(3)'' \times SO(1,3) \quad (4.21)$$

Dans ce cas, les champs se transforment comme suit:

Les champs de jauge $\longrightarrow (3, 1) + (1, 4)$.

Les trois scalaires $\longrightarrow (3, 1)$.

Les supercharges $\longrightarrow (1, 2) + (3, 2) + cc$.

De même les fermions $\longrightarrow (1, 2) + (3, 2) + cc$. (4.22)

Ainsi les champs scalaires, sous le groupe de Lorentz à $D = 4$, forment deux copies de la représentation $\mathbf{3}$ de $SO(3)''$, autrement deux 1-formes de W . A cet égard, ils sont précisément au nombre de $b_1(W)$. De plus leurs superpartenaires sont les $(3, 2) + cc$ fermions. Ensemble, ces scalaires et ces fermions fournissent le contenu de $b_1(W)$ supermultiplets chiraux. Cependant, le champ $(1, 4)$ donne un champ de jauge à quatre dimensions dont les partenaires supersymétriques sont évidemment les fermions qui se transforment comme $(1, 2) + cc$. Or puisque X est d'holonomie \mathbf{G}_2 , alors la variété compacte W doit vérifier la condition $b_1(W) = 0$. Par conséquent, à quatre dimensions la physique de la théorie-M au voisinage des singularités ADE est décrite par la théorie de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 1$ pure.

D. Matière chirale via la dualité avec la corde hétérotique

A ce stade nous avons montré que les singularités orbifold ADE de la variété d'holonomie \mathbf{G}_2 permettent d'avoir une théorie avec un groupe de jauge non abélien. Mais ceci reste insuffisant surtout que notre but majeur consiste à obtenir un modèle de physique des particules. Ce dernier exige la présence de la matière chirale chargée sous les symétries de jauge dans le spectre à quatre dimensions. Le type des singularités les plus simples fournissant de la matière chirale sont les singularités coniques^{8,17}.

Dans notre cas, la métrique conique prend la forme:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 g(Y) \quad (4.23)$$

où $g(Y)$ n'est autre que la métrique de la variété Y qui est compacte de dimension six. Par suite la variété X possédant cette métrique, est vue comme un cône sur Y . De plus elle dispose d'une singularité à l'origine pour $r = 0$. Pour ce type de singularité, le spectre de la théorie-M à $D = 4$ contient bien de la matière chirale.

Il est clair à présent que notre objectif consiste à construire de façon explicite des variétés avec singularités coniques. Pour cette raison, nous allons une fois encore profiter des avantages de la dualité à sept dimensions avec la corde hétérotique sur T^3 que nous avons déjà traité précédemment.

La corde hétérotique compactifiée sur une variété de Calabi-Yau \mathcal{Z} de dimension trois complexe, donne la matière chirale dans son spectre à quatre dimensions^{19,20}. De plus, selon un résultat de Strominger, Yau et Zaslow \mathcal{Z} possède la propriété de la symétrie miroir si elle est réalisée comme une fibration T^3 (avec singularités et monodromies) sur une base W (dans une limite de son espace des modules)²¹. Ainsi, en utilisant au niveau de chaque fibre T^3 la dualité entre la corde hétérotique sur T^3 et la théorie-M sur $K3$, nous déduisons grâce à l'argument adiabatique que la corde hétérotique sur \mathcal{Z} est équivalente à la théorie-M sur une variété X de dimension sept. Cette variété X n'est autre qu'une fibration $K3$ sur la même base W (avec singularités et monodromies) et ayant une holonomie \mathbf{G}_2 . Dans ce cas :

$$\frac{\text{théorie-M}}{\mathbf{K3} \times \mathbf{W}} \approx \frac{\text{hétérotique}}{\mathbf{T}^3 \times \mathbf{W}} \quad (4.24)$$

Utilisons ce résultat afin de déterminer dans X le type de singularité suscitant de la matière chirale. Pour cette raison supposons que la corde hétérotique sur \mathcal{Z} possède une symétrie de jauge non brisée notée G et qui est simplement lacée. Alors dans le contexte de X , ceci signifie que chaque fibre $K3$ possède une singularité de type G et que, la famille des singularités dans X est paramétrisée par la base W .

Ainsi deux cas se distinguent :

1. Si l'espace normal à W , qui est régulière, est une famille des singularités de G variant de façon régulière, alors dans ce cas la théorie à basse énergie est une théorie de jauge sur $\mathbf{R}^{1,3} \times W$ sans matière chirale.
2. En s'intéressant au cas où W est plutôt singulière, dans ce cas l'existence des multiplets chiraux est garanti par les singularités de la base.

Dans le but de déterminer le type de ces singularités, nous utilisons la dualité avec la corde hétérotique. En particulier, plaçons-nous à titre d'exemple dans le cas de la corde hétérotique $E_8 \times E_8$ et où $G = SU(5)$ est sous-groupe de l'un des E_8 ⁸. Ce modèle contient de la matière chirale dans la représentation $\mathbf{5}$ et $\mathbf{10}$ du groupe $SU(5)$. Etudions cet exemple spécifique de prés.

1. Etude en langage de la corde hétérotique

Soit l'exemple de la représentation $\mathbf{5}$. Le commutant de $SU(5)$ dans E_8 est une deuxième copie

de $SU(5)$ notée $SU(5)'$. Or, puisque $SU(5)$ est non brisé, le groupe de structure du fibré de jauge E de \mathcal{Z} se réduit de E_8 à $SU(5)'$. De plus, la partie de la représentation adjointe de E_8 qui se transforme en $\mathbf{5}$ sous $SU(5)$, se transforme en $\mathbf{10}$ sous $SU(5)'$:

$$E_8 \longrightarrow SU(5) \times SU(5)'$$

partie de $\mathbf{248} \longrightarrow (\mathbf{5}, \mathbf{10}). \quad (4.25)$

D'autre part, le chiral non massif $\mathbf{5}$ de $SU(5)$ s'obtient grâce à l'équation de Dirac dans \mathcal{Z} à valeurs dans $\mathbf{10}$ de $SU(5)'$. Effectivement, pour $SU(5)$ non brisé, ses représentations non massives $\mathbf{5}$ sont fournies par les zéros modes de l'équation de Dirac.

Par conséquent, dans le cas des fibres T^3 de rayon ξ , avec ξ très petit, la résolution de l'équation de Dirac s'effectue en deux étapes :

1. Le long de la fibre.
2. Le long de la base.

Autrement dit, l'opérateur de Dirac \mathcal{D} s'écrit :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_T + \mathcal{D}_W \quad (4.26)$$

où \mathcal{D}_T est l'opérateur de Dirac le long de la fibre, par contre \mathcal{D}_W est l'opérateur de Dirac le long de la base.

La valeur propre de \mathcal{D}_T entraîne un terme de "masse" effectif dans l'équation de Dirac dans W . Dans le cas des fibres génériques de $\mathcal{Z} \rightarrow W$, les zéros modes sont localisés au voisinage des points de W sur lesquels \mathcal{D}_T admet un zéro mode. En limitant l'étude à une seule fibre T^3 , le $SU(5)'$ de E est décrit comme fibré plat avec des monodromies autour des trois directions du tore. Par ailleurs au-dessus de quelques points P de W , un zéro mode de \mathcal{D}_T surgit précisément si les monodromies dans la fibre sont tous triviales pour certains vecteurs de la représentation $\mathbf{10}$. Ceci signifie que les monodromies du sous-groupe $SU(5)'$ laissent ces vecteurs fixes.

Si $\mathbf{10}$ est représentée par une matrice antisymétrique $(\mathbf{5}, \mathbf{5})$ que nous notons B^{ij} avec $i, j = 1, \dots, 5$, alors le vecteur invariant par la monodromie correspond à une matrice B ayant quelques éléments non nuls. Il est clair à présent que le sous-groupe de $SU(5)'$ sous lequel B est invariant, est un sous-groupe de $SU(2) \times SU(3)$ (tel que $SU(2)$ agit sur les coordonnées dont $i, j = 1, 2$, cependant $SU(3)$ agit sur $i, j = 3, 4, 5$).

Particulièrement, nous choisissons une base qui diagonalise les monodromies au voisinage de P et qui d'autre part, entraine B^{12} à être le seul élément non nul de la matrice B . Dans ce cas, le sous-groupe de $SU(5)'$ laissant B fixe est exactement

$SU(2) \times SU(3)$. Or, le commutant de ce dernier dans E_8 n'est autre que $SU(6)$. Ainsi, nous distinguons deux cas:

Au dessus du point P :

1. Les monodromies commutent non seulement avec $SU(5)$ mais aussi avec $SU(6)$.
2. Les monodromies attribuent de grandes masses à tout les modes de E_8 excepté ceux de la représentation adjointe de $SU(6)$.
3. Le groupe de jauge se restreint à $SU(6)$ au lieu de E_8 .

Loin du point P :

1. Les monodromies brisent $SU(6)$ en $SU(5) \times U(1)$.

Par conséquent, réduire l'étude de E_8 à $SU(6)$ revient à considérer $U(1)$ comme fibré de jauge plutôt que $SU(5)'$. Autrement,

$$E_8 \longrightarrow SU(6) \\ \text{implique que: } SU(5)' \longrightarrow U(1), \quad (4.27)$$

surtout que $U(1)$ est le second facteur dans $SU(5) \times U(1) \subset SU(6)$.

Or dire que $SU(6)$ est non brisé au dessus de P pour la corde hétérotique, signifie dans le contexte de la théorie-M que la fibre sur P possède une singularité $SU(6)$. Par contre la non-brisure de $SU(5) \times U(1)$ loin de P , s'explique au niveau de la théorie-M par le fait que la fibre générique contient seulement la singularité $SU(5)$ au lieu de $SU(6)$. Et de plus le $U(1)$ non brisé est porté par la 3-forme C de la théorie-M.

En conclusion, la matière chirale provenant de la corde hétérotique sur \mathcal{Z} est localisée aux points P de W où les monodromies dans les fibres T^3 sont triviales.

Nous allons compléter cette étude par passage à la théorie-M dans ce qui suit.

2. Etude en langage de la théorie-M

Avant de reprendre la description faite dans le cadre de la théorie-M sur une variété X d'holonomie \mathbf{G}_2 , commençons tout d'abord par traiter brièvement le cas de l'ingénierie géométrique de la matière chargée pour type IIA sur une Calabi-Yau de dimension trois complexe²². Cette variété notée \mathcal{R} est réalisée comme une fibre $K3$ sur une base Q' de sorte que:

1. Sur un point distingué $P \in Q'$, la singularité est de type \widehat{G} .
2. Sur un point générique de Q' , cette singularité est remplacée par une de type G où:

$$\text{rang} \widehat{G} = 1 + \text{rang} G \quad (4.28)$$

A ce niveau, nous restreignons notre étude à $\widehat{G} = SU(6)$ et $G = SU(5)$ puisque c'est le cas que nous avons déjà traité dans le cadre de la corde hétérotique.

La singularité $SU(6)$ est décrite par l'équation:

$$xy = z^6. \quad (4.29)$$

Or, son dépliement dépend de cinq paramètres complexes et s'écrit:

$$xy = z^6 + P_4(z) \quad (4.30)$$

où $P(z)$ est un polynôme quartique en z .

Dans le but de déformer la singularité $SU(6)$ en retenant la singularité $SU(5)$, le polynôme $z^6 + P_4(z)$ doit avoir une racine du 5^{ème} ordre. Sous cette condition, la déformation prend la forme:

$$xy = (z + 5\varepsilon)(z - \varepsilon)^5 \quad (4.31)$$

où ε est un paramètre complexe de la base Q' .

En plus du fait qu'elle décrit le dépliement partiel de la singularité $SU(6)$, cette équation (4.31) donne aussi la structure complexe de l'espace total \mathcal{R} .

Dans la suite, nous allons prolonger cette étude à la variété X d'holonomie \mathbf{G}_2 qui nous intéresse^{19,20}. Dans ce cas, la construction est similaire à la seule différence, est d'aborder la singularité $SU(6)$ en tant qu'une variété hyperkahlérienne au lieu de complexe comme est le cas pour cet exemple de \mathcal{R} . Pour cette raison, chaque paramètre complexe de P_4 doit être accompagné par un paramètre réel qui contrôle l'aire d'un diviseur exceptionnel lors de la déformation de la singularité. Par conséquent, les paramètres ne sont plus cinq complexes mais plutôt une famille de cinq triplets de paramètres réels. L'espace des paramètres de cette déformation n'est autre que W et l'espace total est la variété singulière d'holonomie \mathbf{G}_2 dont la singularité produit la matière chirale.

A ce niveau, il est évident de se demander comment sera le dépliement dans ce cas?

Afin de mieux illustrer cette idée, nous ferons recours à la description de Kronheimer du dépliement via le quotient hyperkahlérien. De plus, au lieu de limiter l'étude comme nous l'avons fait

jusqu'à présent à la singularité $SU(6)$, nous allons plutôt généraliser l'analyse en considérant le dépliement de $SU(N+1)$ qui garde la singularité $SU(N)$.

Ce nouveau dépliement est appelé dépliement hyperkahlérien, de plus il s'obtient en prenant un système de $N+1$ hypermultiplets $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N$ avec une action de $K = U(1)^N$. Sous le $i^{\text{ème}}$ $U(1)$ (où $i = 1, \dots, N$), ϕ_i a la charge 1 et ϕ_{i-1} porte la charge -1 par contre tout les autres sont neutres. Ainsi ces hypermultiplets paramétrisent le produit de $N+1$ copies de \mathbf{R}^4 que nous notons \mathbf{H}^{N+1} pour $\mathbf{H} \simeq \mathbf{R}^4$.

Par ailleurs, le quotient hyperkahlérien de ce \mathbf{H}^{N+1} par K se définit en deux étapes:

1. En posant les \vec{D} -champs égaux à zéro.
2. En divisant par K .

Ce quotient est alors noté par \mathbf{H}^{N+1}/K et il est isomorphe à $\mathbf{H}/\mathbf{Z}_{N+1}$ de singularité $SU(N+1)$. En global, le dépliement contient $3N$ paramètres puisque \vec{D} possède pour chaque $U(1)$ trois composantes dont le groupe de rotation est $SU(2)$ (R-symétrie). D'autre part, le dépliement partiel de $SU(N+1)$, tout en retenons la singularité $SU(N)$, s'obtient alors:

1. En imposant aux $3(N-1)$ paramètres à être égaux à zéro.
2. En laissant les trois paramètres qui restent varier. Notons que ces trois ne sont autre que les valeurs de \vec{D} pour l'un des $U(1)$.

Pour effectuer cette procédure, commençons d'abord par réaliser K comme

$$K = K' \times U(1)' \quad (4.32)$$

où $U(1)'$ est l'un des facteurs choisis de $K = U(1)^N$. Ensuite, prenons le quotient hyperkahlérien de \mathbf{H}^{N+1} par K' pour avoir une variété hyperkahlérienne de dimension 8 notée:

$$\hat{X} = \mathbf{H}^{N+1}/K'. \quad (4.33)$$

Après, considérons le quotient ordinaire et non pas le quotient hyperkahlérien de \hat{X} par $U(1)'$. Ce quotient va nous fournir la variété X de dimension sept qui admet pour groupe d'holonomie, le groupe \mathbf{G}_2 :

$$X = \hat{X}/U(1)'. \quad (4.34)$$

De plus, afin d'identifier les groupes d'action sur \mathbf{H} et \mathbf{H}' , paramétrisons \mathbf{H} et \mathbf{H}' respectivement par les paires des variables complexes (a, b) et (a', b') .

Alors:

1. L'action de \mathbf{Z}_N sur \mathbf{H} :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{2ik\pi}{N}} a \\ e^{-\frac{2ik\pi}{N}} b \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

2. L'action de $U(1)'$, commutant avec \mathbf{Z}_N et préservant la structure hyperkahlérienne, est:
 - sur \mathbf{H}

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{N}} a \\ e^{-\frac{i\psi}{N}} b \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

- sur \mathbf{H}'

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\psi} a' \\ e^{i\psi} b' \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Enfin, en posant

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{i\psi} \\ \sigma_1 &= \bar{a}' \text{ et } \sigma_2 = b' \\ \sigma_3 &= a \text{ et } \sigma_4 = \bar{b}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

le quotient $(\mathbf{H}/\mathbf{Z}_N \times \mathbf{H}')/U(1)'$ peut être décrit grâce à ces quatre variables complexes modulo l'équivalence:

$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) &\longrightarrow (\lambda^N \sigma_1, \lambda^N \sigma_2, \lambda \sigma_3, \lambda \sigma_4) \\ |\lambda| &= 1. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Ce quotient nous décrit alors un cône sur l'espace projectif pondéré $\mathbf{WCP}_{N,N,1,1}^3$. Par conséquent, nous déduisons que la variété d'holonomie \mathbf{G}_2 que nous cherchons est réalisée en tant qu'un cône sur l'espace projectif pondéré. De plus, étant donné que $\mathbf{WCP}_{N,N,1,1}^3$ dispose d'une famille de singularités A_{N-1} aux points $(\omega_1, \omega_2, 0, 0)$, qui apparaît clairement en posant $\lambda = e^{\frac{2ik\pi}{N}}$, alors notre variété possède bien à son tour une famille de singularités A_{N-1} .

V. CONCLUSION

Loin de chercher l'exhaustivité, ce travail a tenté d'introduire la théorie-M qui est envisagée susceptible d'unifier les cinq modèles des théories des supercordes, différentes dans leurs descriptions perturbatives faiblement couplées.

Nous avons également essayé de montrer dans ce papier, que la compactification de la théorie-M, supergravité à onze dimensions avec 32 supercharges, sur une variété de dimension sept et d'holonomie \mathbf{G}_2 fournit une théorie à quatre dimensions de supersymétrie $\mathcal{N} = 1$.

Nous avons enfin procédé à l'étude de deux cas:

1. D'une part, lorsque X était régulière, l'analyse de Kaluza-Klein des champs à onze dimensions nous a produit à quatre dimensions, une théorie de supergravité $\mathcal{N} = 1$ couplée à $b_2(X)$ multiplets vectoriels abéliens et $b_3(X)$ multiplets chiraux.
2. D'autre part, dans le cas où X possédait un certain type de singularités, la dynamique à basse énergie a été décrite par une théorie de jauge non abélienne couplée à de la matière chirale. En particulier, les symétries de jauge non abéliennes locales ont été obtenues quand X a été réalisée comme une $K3$ fibration sur une base de dimension trois. Tandis que des singularités additionnelles, plus précisément, les singularités coniques de codimension sept dans X nous ont fournis de la matière chirale.

Acknowledgement: Je tiens à remercier Prof. E. H. Saidi ainsi que Dr. A. Belhaj pour les discussions. Je remercie également L'ICTP de Trieste de m'avoir faite profiter de ses séminaires..

VI. REFERENCES

-
- ¹ MB Green, J.H Schwarz, E. Witten, Superstring Theory, Cambridge University Press (1987).
 - ² E.Witten, Some Comments on String Dynamics , hep-th/9507121.
 - ³ J.Polchinski, String theory in 2 vols, Cambridge Univ. press 1998.
 - ⁴ C.Vafa, Lectures on Strings and Dualities, hep-th/9702201.
 - ⁵ J.H.Schwarz, Lectures on Superstring and M Theory Dualities, hep-th/9607201.
 - ⁶ E.Witten, String Theory Dynamics in Various Dimensions, hep-th/9507121
 - ⁷ P.Horrava, E.Witten, Heterotic and type I String Dynamics from eleven dimensions, hep-th/9510209. P.Horrava and E.Witten, Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary, hep-th/9603142.
 - ⁸ B.Acharya, M-theory, G_2 -manifolds and four dimensional physics, Spring School on Superstrings and Related Matters, March 2002
 - ⁹ P.Aspinwal, $K3$ Surfaces and String Duality, hep-th/9611137.
 - ¹⁰ D.D.Joyce, Compact Riemannian 7-manifolds with Holonomy G_2 . I, II J.Diff.Geom. 43(1996), 329-375
 - ¹¹ R.L.Bryant and S.Salamon, On the Construction of some complete metrics with exceptional holonomy, Duke Math. J.58, 829 (1989).
 - ¹² C.Basley and E.Witten, A Note on Fluxes and Superpotentials In M-theory Compactifications on Manifolds of G_2 -holonomy, hep-th/0203061.
 - ¹³ J.A.Harvey and G.Moore, Superpotentials and Membrane Instantons, hep-th/9907026.
 - ¹⁴ G.Papadopoulos and P.K.Townsend, Compactification of $D = 11$ Supergravity on Spaces of exceptional holonomy, hep-th/9506150.
 - ¹⁵ B.S.Acharya, M Theory, Joyce Orbifolds and Super Yang Mills, hep-th/9812205.
 - ¹⁶ B.S.Acharya, On Realising $\mathcal{N} = 1$ Super Yang Mills in M theory, hep-th/0011089.
 - ¹⁷ M.Atiyah and E.Witten, M theory Dynamics on a Manifolds of G_2 holonomy, hep-th/0107177.
 - ¹⁸ A. Belhaj, L.B. Drissi, J. Rasmussen, On $\mathcal{N} = 1$ gauge models from geometric engineering in M-theory, hep-th/0304019.
 - ¹⁹ E.Witten, Anomaly Cancellation on G_2 Manifolds, hep-th/0108165.
 - ²⁰ B.Acharya and E.Witten, Chiral Fermions from Manifolds of G_2 holonomy, hep-th/0109152.
 - ²¹ A.Strominger, S.T.Yau and E.Zaslow, Mirror Symmetry is T-Duality, hep-th/9606040.
 - ²² S.Katz and C.Vafa, Matter from Geometry, hep-th/9606086.